第２講　力学Ⅱ

1

次の文を読んで，[　　　] には適した式または数値を，{　　　} からは適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，[[　　　]] はすでに [　　　] または {　　　} で与えられたものと同じものを表す。また，問1，問2では指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

以下の設問では，向心力を受けて円運動する物体について摩擦力による速さの変化を考える。その際，さまざまな物理量の微小な変化を調べる。

(1)　図１のように，なめらかな台の上に置かれた質量 m の物体が，ひもにつながれている。ひもは台の中心Oに開けられたなめらかな小さな穴を貫通し，ばねにつながれている。さらにばねの下端は下側の台に固定されている。この物体は半径 r，速さ v の等速円運動をしている。ばね定数は b であり，ばねとひもの質量は無視してよいものとする。また，物体が点Oにあるとき，ばねの長さが自然の長さであるようになっている。

この等速円運動に対する運動方程式は $\dfrac{mv^2}{r}=$ [ア] となる。物体の運動エネルギーは $K=\dfrac{1}{2}mv^2$，ばねの弾性力の位置エネルギーは $V=\dfrac{1}{2}br^2$ で与えられる。このとき運動方程式から運動エネルギー K と位置エネルギー V の間に

{ イ：①　$K=V$　　②　$K=-V$　　③　$2K=V$
　　　④　$2K=-V$　　⑤　$K=2V$　　⑥　$K=-2V$ }

という関係が成り立つことが分かる。

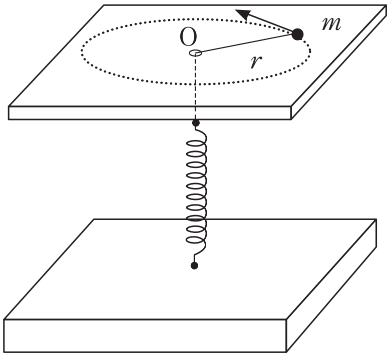


図１

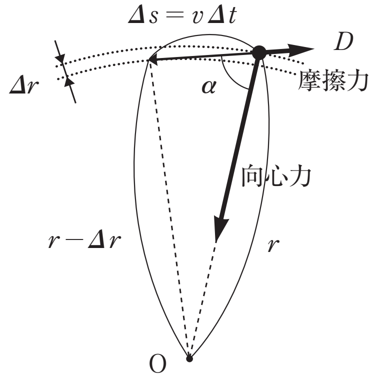


図２

(2)　次に，この物体に速度と逆方向に摩擦力が作用した場合を考える。摩擦力の大きさ D は一定とする。ばねの力に比べて非常に小さい摩擦力が作用したため，図２のように軌道がわずかに円運動から変化したとしよう。そのため，物体の速度は(1)で考えた速度と厳密には異なっている。ただし，摩擦力が非常に小さい場合には，速度の差はわずかであるので無視してよいものとする。物体の速さを v とすると，図２のように微小な時間 Δt の間

< Note >

の移動距離は $\Delta s=v\Delta t$ で与えられる。この移動の結果，物体と点Oとの距離は r から $r-\Delta r$ に変化する。実際には r に比べてその変化 Δr は非常に小さいが，この図では微小な変化 Δr を強調している。また，物体の運動方向とばねによる向心力の間の角度 α は 90° よりわずかに小さい。

この微小な時間 Δt の間に生じる運動エネルギーの微小な変化 ΔK は，ばねの力による仕事と摩擦力による仕事で決まるので，$\Delta K=($ **ウ** $)\times\Delta s$ と与えられる。Δs と Δr が微小であることより，$\Delta s\cos\alpha=\Delta r$ が成り立つとする。運動エネルギーの微小な変化 ΔK のうち，ばねによる仕事は，半径の微小な変化 Δr に比例する形で **エ** と表される。このばねによる仕事と位置エネルギーの微小な変化の関係を調べよう。軌道の半径が r から $r-\Delta r$ に微小に変化する間に，位置エネルギーは

$$\begin{aligned}\Delta V&=\Delta\left(\frac{1}{2}br^2\right)\\&=\frac{1}{2}b(r-\Delta r)^2-\frac{1}{2}br^2\\&=-br\Delta r+\frac{1}{2}b(\Delta r)^2\\&\fallingdotseq -br\Delta r\end{aligned}$$

だけ微小に変化する。上式の最後の行では，微小な変化 Δr の2次の項 $\frac{1}{2}b(\Delta r)^2$ を無視している。このように，本問題では微小な変化の2次の項は無視してよい。したがって運動エネルギーの微小な変化のうち，ばねによる仕事の部分は

$\left\{\textbf{オ}：①\ +1,\quad ②\ -1,\quad ③\ +\frac{1}{2},\quad ④\ -\frac{1}{2}\right\}\times\Delta V$ となる。また摩擦力による仕事は，微小な時間 Δt に比例する形で **カ** と表すことができる。したがって，Δt の間に生じる力学的エネルギー $E=K+V$ の微小な変化 $\Delta E=\Delta K+\Delta V$ は

$$\Delta E=\boxed{\text{カ}} \qquad \text{(i)}$$

と与えられる。

摩擦力が非常に小さいので，物体は近似的に円運動を保ちながら，少しずつ速さと半径が変化していくとする。このとき関係式 **イ** は成り立っていると考えてよい。したがって，微小な変化 ΔK，ΔV についても，同じ関係を保ちながら，力学的エネルギーが $\Delta E=$ **カ** と微小に変化していくので，運動エネルギーの微小な変化は

$$\Delta K=\boxed{\text{キ}}\times(\boxed{\text{カ}}) \qquad \text{(ii)}$$

となる。（注：**キ** には適切な数値を入れなさい。）

(3)　上の(2)では微小な時間 Δt の間の運動エネルギーの微小な変化を求めた。この間に，物体の速さは v から $v+\Delta v$ に変化するので，運動エネルギーの微小な変化は $\Delta K=\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\fallingdotseq mv\Delta v$ とも表せる。この式と式(ii)より，物体の速さ v の変化率は

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\boxed{\text{ク}} \qquad \text{(iii)}$$

と与えられる。式(iii)は直線上の等加速度運動と同じ形をしている。時刻 $t=0$ での物体の

＜ Note ＞

速さを v_0 とすると，時刻 t での物体の速さは $v(t)=$ **ケ** となる。

⑷　これまでは，物体がばねの力と小さい摩擦力を受けて近似的に円運動する場合を考えてきた。今度は，図３のように，質量 M の地球の周りを運動する質量 m の人工衛星について，これまでと同じような計算を行う。地球の中心から人工衛星までの距離を r とする。人工衛星には地球からの万有引力と，大気から受ける小さい空気抵抗力が作用している。ただし，人工衛星の質量 m は地球の質量 M に比べて非常に小さいため地球は動かないとしてよい。さらに，地球と人工衛星の大きさは無視してよいものとする。

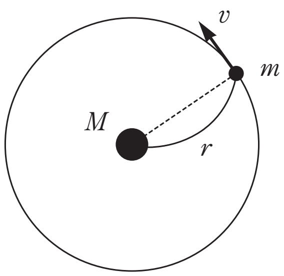


図３

まず，空気の抵抗力がはたらいていないとする。人工衛星は速さ v，半径 r の等速円運動をしている。万有引力定数を G とすると運動方程式は $\dfrac{mv^2}{r}=\dfrac{GMm}{r^2}$ となる。また，万有引力による位置エネルギーは $V=-\dfrac{GMm}{r}$ であることが知られている。このとき運動方程式から，運動エネルギー K と位置エネルギー V の間の関係式

$$\left\{ \begin{array}{llll} \textbf{コ}: & ①\ K=V & ②\ K=-V & ③\ 2K=V \\ & ④\ 2K=-V & ⑤\ K=2V & ⑥\ K=-2V \end{array} \right\}$$

が得られる。

次に，⑵，⑶における摩擦力と同様に人工衛星に空気の抵抗力が作用した場合を考える。ここで空気の抵抗力は，速度と逆方向にはたらく，大きさ D の一定の力として取り扱う。ただし，空気の抵抗力は非常に小さく，人工衛星は近似的に円運動しているとみなしてよいものとする。

問１　人工衛星の場合にも，⑵と同様に，運動エネルギーの微小な変化 ΔK は万有引力と空気の抵抗力による仕事で与えられる。このことから，人工衛星の力学的エネルギーの微小な変化 ΔE に対して式(i)が成り立つことを，計算過程も含めて示しなさい。ただし，半径が r から $r-\Delta r$ に変化するとき，位置エネルギー $V=-\dfrac{GMm}{r}$ の微小な変化は

$$\Delta V=\Delta\left(-\frac{GMm}{r}\right)=-GMm\left(\frac{1}{r-\Delta r}-\frac{1}{r}\right)\fallingdotseq-\frac{GMm}{r^2}\Delta r$$

という近似式で与えられる。

問２　上の問１の結果と，微小な変化 ΔK，ΔV に対しても関係式 **コ** と同じ関係が成り立つことを用いて，式(iii)に対応する人工衛星の速さ v の変化率を表す方程式を計算過程も含めて導きなさい。また抵抗力により，人工衛星が加速されるか，減速されるか，変化しないか，いずれであるかを，その理由とともに答えなさい。

＜ Note ＞

2

次の文章を読んで，[　　　]に適した式を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，[- - - -]はすでに[　　　]で与えられたものと同じ式を表す。また，問 1，問 2 では，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

質量 m_1，m_2，m_3，半径 l_1，l_2，l_3 の円盤状の物体 1，物体 2，物体 3 の運動を考える。図 1 のように，物体 1 は水平な床の上に置かれている。物体 1 の上面は床に平行で，物体 1 の上に物体 2 が置かれている。物体 1 と物体 2 は互いに固定されておらず，各々の中心が x 座標の原点で静止している。時刻 0 において物体 3 が左から物体 1 に衝突した。衝突後，物体 1 が動き出し，物体 2 は物体 1 との接触面上を滑り出した。衝突にかかる時間は十分短く，物体 3 が物体 1 に衝突した直後の物体 2 の床に対する速度は 0 であるとする。真上から見ると，物体 1，物体 2，物体 3 の中心は常に同一直線上にあるものとする。物体 1 と床の間の動摩擦係数を μ_1，物体 1 と物体 2 の間の動摩擦係数を μ_2，物体 1 と物体 3 の間のはね返り係数を e，重力加速度を g とする。

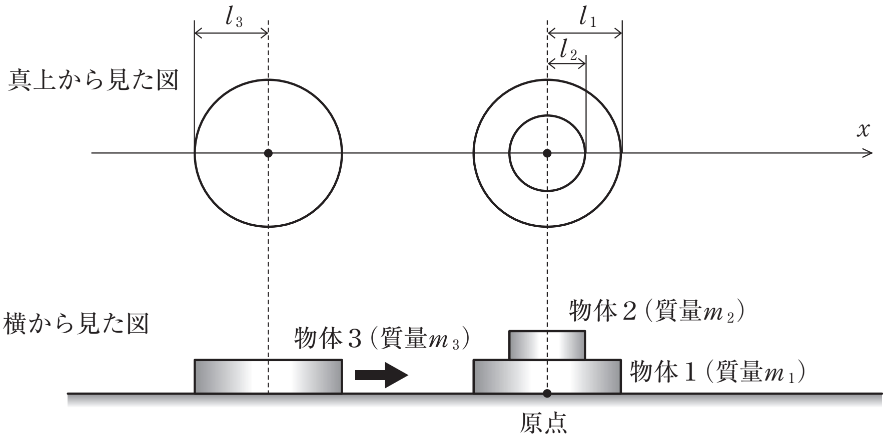


図 1

位置，速度，加速度は右向きを正にとり，速度および加速度は床に対するものと定義する。また，空気抵抗は無視する。

(1) 物体 3 が物体 1 に衝突する直前の物体 3 の速度を v_0 とする。物体 3 が物体 1 に衝突した直後の物体 1 の速度は $v=$ [ア]，物体 3 の速度は [イ] である。物体 2 は物体 1 の上面からはみ出すことなく運動し，時刻 T_A において物体 1 と物体 2 の相対速度が 0 となった。その後，両者は一体となって運動を続け，時刻 T_B において静止した。時刻 0 から T_A までの物体 1 と物体 2 の加速度を a_1，a_2 とし，T_A から T_B までの物体 1 の加速度を a'，T_A での物体 1 の速度を v' とする。また時刻 T_A での物体 1 と物体 2 の中心の位置を x_1，x_2 とし，T_B での物体 1 の中心の位置を x_B とする。a_1，a_2，a' は，m_1，m_2，μ_1，μ_2，g のうち必要なものを用いると，$a_1=$ [ウ]，$a_2=$ [エ]，$a'=$ [オ] と表せる。

＜ Note ＞

問１　図２を解答欄に書き写して，時刻０から T_B までの物体１，物体２の速度，加速度のグラフを描け。ただし，物体１と物体２のグラフは１つのグラフにまとめて作成し，(a)には横軸が時刻，縦軸が速度のグラフを，(b)には横軸が時刻，縦軸が加速度のグラフを描け。またグラフ中に，a_1，a_2，a'，v，v'，T_A，T_B を明示せよ。

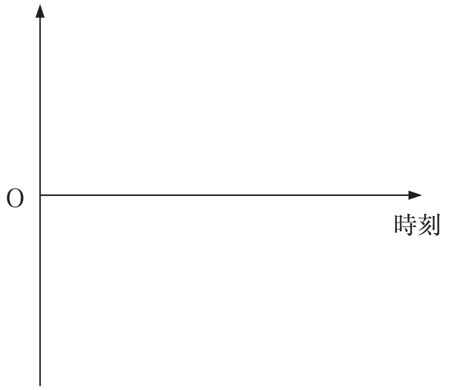


図２

T_A および v' は a_1，a_2，v を用いると，T_A＝［カ］，v'＝［キ］と表せる。また T_B は a_1，a_2，a'，v のうち必要なものを用いると，T_B＝［ク］と表せる。さらに，a_1＝［ウ］，a_2＝［エ］，a'＝［オ］を T_A＝［カ］，T_B＝［ク］に代入することで，T_A，T_B は v，m_1，m_2，μ_1，μ_2，g のうち必要なものを用いると，T_A＝［ケ］，T_B＝［コ］と表せる。

「物体２は物体１の上面からはみ出すことなく運動」するという条件は，l_1，l_2 および v，m_1，m_2，μ_1，μ_2，g のうち必要なものを用いると，［サ］と表せる。また x_B は v，m_1，m_2，μ_1，μ_2，g のうち必要なものを用いると x_B＝［シ］と表せる。

(2)　物体１と物体２の運動をエネルギー保存の観点から考える。物体３が物体１に衝突した直後の物体１と物体２の運動エネルギーの総和は，v，m_1，m_2，μ_1，μ_2，g のうち必要なものを用いると，［ス］と表せる。一方，時刻０から T_B までに，物体１と床の間の摩擦で失われるエネルギー E_1，および物体１と物体２の間の摩擦で失われるエネルギー E_2 は，m_1，m_2，μ_1，μ_2，g，x_1，x_2，x_B のうち必要なものを用いると，E_1＝［セ］，E_2＝［ソ］と表せる。上で求めた x_B は，物体３が物体１に衝突した直後の物体１と物体２の運動エネルギーの総和［ス］と E_1＝［セ］，E_2＝［ソ］の間に成り立つ関係を利用することでも求めることができる。

問２　時刻 T_B は動摩擦係数 μ_1 に依存するものの，動摩擦係数 μ_2 には依存しない。その理由を運動量の変化の観点から述べよ。

< Note >

第２講　確認テスト

次の文を読んで，［　　　］に適した式を，また，｛　　　｝には解答群のうちから適切な選択肢を選んでその番号を，それぞれ記せ。

大きな球の頂上に小球を置くことは難しいが，お椀（わん）の底には容易に小球を置くことができる。この意味で，小球にとって大きな球の頂上は不安定な点，お椀の底は安定な点になっている。このような安定点，不安定点について以下で考察してみよう。

(1)　鉛直に立てられた半径 r〔m〕の円形をした針金の輪がある。この輪に沿って質量 m〔kg〕の小球が摩擦なく動けるようになっている。図１のように，小球と輪の中心を通る線分が輪の中心を通る鉛直線となす角を θ〔rad〕とする。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。以下では，輪に沿う方向の力の成分については θ の増加する方向を正にとる。また，必要に応じて，微小な角 α に対して $\cos\alpha \fallingdotseq 1$，$\sin\alpha \fallingdotseq \alpha$ と近似してよい。

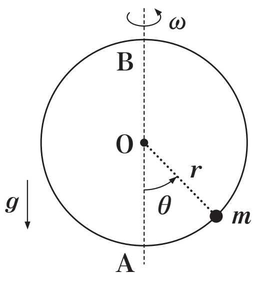


図１

この輪を鉛直の中心軸 AB の周りに角速度 ω〔rad/s〕（>0）で回転させる。輪と一緒に回転する観測者には，小球に重力に加えて遠心力が働くようにみえる。重力の輪に沿う方向の成分 F〔N〕は $F=-mg\sin\theta$ で，遠心力の輪に沿う方向の成分 R〔N〕は $R=$［　イ　］で与えられる。これらの合力を $G=F+R=-ma\sin\theta$ と書くと，a は g，r，ω，θ のみを用いて $a=$［　ロ　］〔m/s^2〕と表される。$G=0$ を満たす点には小球を静止させることができる。 そのような点をつりあい点と呼ぶ。$\theta=0$ と π の２点はつりあい点である。小球がつりあい点から微小な変位をしたとき，小球に働く合力の向きが変位の向きと同じ場合には，つりあい点を不安定点と呼ぶ。一方，合力の向きが変位の向きと逆の場合，つりあい点を安定点と呼ぶ。

上で求めた合力の $\theta=\pi$ の点の付近での振舞いを調べてみよう。$\theta=\pi+\Delta\theta$ として，円周方向に沿った微小な変位 $x=r\Delta\theta$ を使い，$G \fallingdotseq mxb$ と書くと，b は g，ω，r のみを用いて $b=$［　ハ　］と表される。b は ω の値によらず正であるから，$\theta=\pi$ の点は必ず不安定点になっている。

一方，$\theta=0$ の点の付近では，上と同様に，微小な変位 $x'=r\Delta\theta$ を使い，$G \fallingdotseq mx'b'$ と書くと，b' は g，ω，r のみを用いて $b'=$［　ニ　］と表される。したがって $\theta=0$ の点は，ω がある角速度 ω_0〔rad/s〕より小さい場合には安定点，ω_0 より大きい場合には不安定点になっている。この角速度 ω_0 は g，r のみを用いて $\omega_0=$［　ホ　］と表される。$\theta=0$ の点が安定点であるとき，この点の付近での単振動の周期は［　ヘ　］〔s〕と表される。

$\theta=0$ の点が不安定点であるとき，新しいつりあい点が $\theta=0$ と $\theta=\pi$ 以外のところにできる。このつりあい点は安定点であり，輪の最下点 A から測った高さは g，r，ω のみを用いて［　ト　］〔m〕と表される。

＜ Note ＞

(2)　次に，この小球をまっすぐで滑らかな長さ $2L$〔m〕の針金 AOB 上を動くように取り付ける。この針金を，図２のように鉛直方向から角度 ϕ〔rad〕$\left(0<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$傾け，中点Ｏを通る鉛直線の回りに角速度 ω〔rad/s〕(>0)で回転させる。

このとき，ω がある角速度 ω_0〔rad/s〕より小さければつりあい点は針金上に存在せず，ω が ω_0 を越えるとつりあい点ができる。この角速度 ω_0 は $\omega_0=$ **チ** と表される。この条件が満たされているときには，つりあい点は，{ **リ**：①　中点Ｏより上　②　中点Ｏ　③　中点Ｏより下 }の位置にある。また，針金とともに回転する観測者が，つりあい点よりわずか下に静かに小球を置くと，この小球は，

{ **ヌ**：①　速さを増しながら点Ａに到達　②　一定の速さに落ち着きながら点Ａに到達
③　つりあい点のまわりで単振動　④　点Ｏを中心に単振動
⑤　速さを増しながら点Ｂに到達　⑥　一定の速さに落ち着きながら点Ｂに到達 }

する。

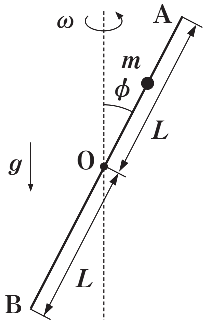


図２

＜ Note ＞

第２講　解答

1

ア　br　　イ　①　　ウ　$br\cos\alpha - D$　　エ　$br\cdot\varDelta r$　　オ　②

カ　$-Dv\cdot\varDelta t$　　キ　$\dfrac{1}{2}$　　ク　$-\dfrac{D}{2m}$　　ケ　$v_0-\dfrac{D}{2m}t$　　コ　④

問１　略

問２　$\dfrac{\varDelta v}{\varDelta t}=\dfrac{D}{m}$，加速される　（理由は略）

2

ア　$\dfrac{(1+e)m_3}{m_1+m_3}v_0$　　イ　$\dfrac{m_3-em_1}{m_1+m_3}v_0$　　ウ　$-\dfrac{\mu_1(m_1+m_2)+\mu_2 m_2}{m_1}g$　　エ　$\mu_2 g$

オ　$-\mu_1 g$　　カ　$\dfrac{v}{a_2-a_1}$　　キ　$\dfrac{a_2}{a_2-a_1}v$　　ク　$\dfrac{a'-a_2}{(a_2-a_1)a'}v$　　ケ　$\dfrac{m_1 v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}$

コ　$\dfrac{m_1 v}{\mu_1(m_1+m_2)g}$　　サ　$l_1-l_2 \geqq \dfrac{m_1 v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}$

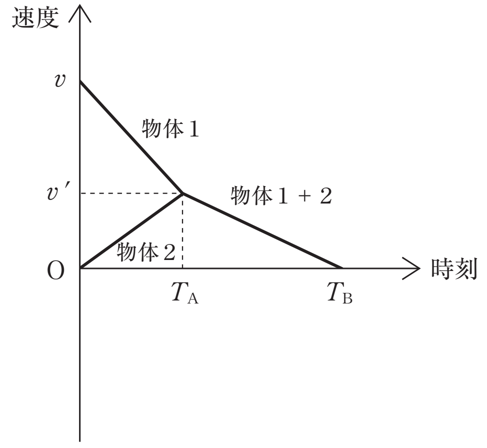
シ　$\dfrac{m_1 v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}\left\{1+\dfrac{\mu_2 m_1}{\mu_1(m_1+m_2)}\right\}$

ス　$\dfrac{1}{2}m_1 v^2$

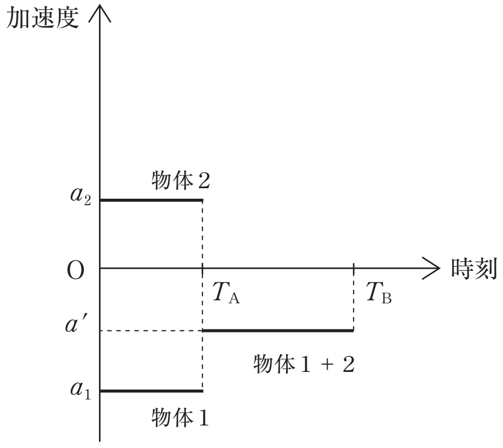
セ　$\mu_1(m_1+m_2)g x_B$

ソ　$\mu_2 m_2 g(x_1-x_2)$

問１　(a)



(b)



問２　略

第２講　確認テスト

【解答】

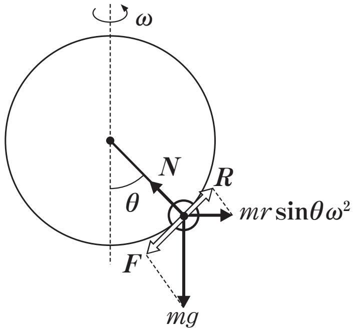
イ　$m\omega^2\cdot r\sin\theta\cdot\cos\theta$　　ロ　$g-r\omega^2\cos\theta$　　ハ　$\dfrac{g+r\omega^2}{r}$　　ニ　$\dfrac{r\omega^2-g}{r}$　　ホ　$\sqrt{\dfrac{g}{r}}$

ヘ　$2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g-r\omega^2}}$　　ト　$r-\dfrac{g}{\omega^2}$　　チ　$\dfrac{1}{\sin\phi}\sqrt{\dfrac{g\cos\phi}{L}}$　　リ　①　　ヌ　⑤

【解説】

(1)

イ　$R=m\omega^2\cdot r\sin\theta\cdot\cos\theta$



ロ　$G=F+R=(-mg\sin\theta)+m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta$

$=-m(g-r\omega^2\cos\theta)\sin\theta$　　$\therefore\ a=g-r\omega^2\cos\theta$

ハ　$\theta=\pi+\Delta\theta$のとき，Gは

$G\fallingdotseq m(g+r\omega^2)\Delta\theta=m\dfrac{g+r\omega^2}{r}\underbrace{r\Delta\theta}_{x}$　　$\therefore\ b=\dfrac{g+r\omega^2}{r}$

$\left(\begin{array}{l}\cos(\pi+\Delta\theta)\fallingdotseq-1\\ \sin(\pi+\Delta\theta)\fallingdotseq-\Delta\theta\\ \text{に注意！}\end{array}\right)$

ニ　$\theta=\Delta\theta$のとき，

$G\fallingdotseq -m(g-r\omega^2)\cdot\Delta\theta=m\dfrac{r\omega^2-g}{r}\cdot\underbrace{r\Delta\theta}_{x'}$　　$\therefore\ b'=\dfrac{r\omega^2-g}{r}$

ホ　$G=0$として，

$g-r{\omega_0}^2=0$　　$\therefore\ \omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{r}}$

ヘ　運動方程式は

$ma'=m\dfrac{r\omega^2-g}{r}\cdot x'=-m\dfrac{g-r\omega^2}{r}x'$　　$\therefore\ T=2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g-r\omega^2}}$

ト　$G=0$のとき，$\theta\neq0$として，

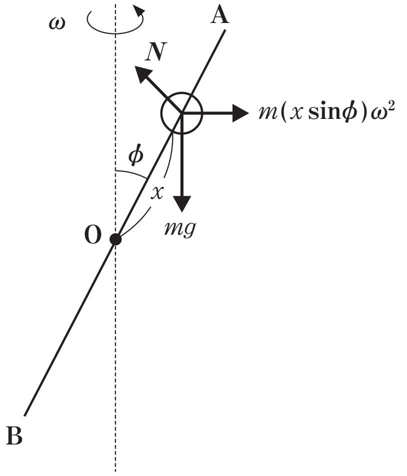
$g-r\omega^2\cos\theta=0$　　$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{g}{r\omega^2}$

よって，

$h=r(1-\cos\theta)=r-\dfrac{g}{\omega^2}$

(2)　O→A方向の合力は，右図の力を分解して

$$f=-mg\cos\phi+mx\omega^2\sin^2\phi$$



チ　$f=0$ となる x は，

$$x=\frac{g\cos\phi}{\omega^2\sin^2\phi}$$

となるが，$x<L$ ゆえ，

$$\frac{g\cos\phi}{\omega^2\sin^2\phi}<L$$

$$\therefore\quad \omega>\underbrace{\frac{1}{\sin\phi}\sqrt{\frac{g\cos\phi}{L}}}_{=\omega_0}$$

リ　①

ヌ　⑤